Лекция

Раздел 3. Основы логики предикатов.

Понятие предиката. Операции над предикатами. Квантор всеобщности и квантор существования. Термы, элементарные формулы и формулы логики предикатов. Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы. Замыкание формулы. Интерпретация. Выполнимые, истинные и ложные в данной интерпретации формулы. Модель. Свойства формул в данной интерпретации.

Логически общезначимые формулы, противоречия. Выполнимые и равносильные формулы. Правила перенесения отрицания через кванторы. Правила перестановки кванторов.

Правила переименования связанных переменных. Правила вынесения кванторов за скобки. Предваренная нормальная форма.

Раздел 3. Основы логики предикатов.

Центральная идея математической логики состоит в том, чтобы записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам.

При этом правильность рассуждений можно проверять механически, не вникая в их смысл.

Иногда высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Кроме того, необходимо иметь возможность утверждать, что любые или какие-то объекты обладают определенными свойствами или находятся в некоторых отношениях.

Поэтому следует расширить логику высказываний и построить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание тех высказываний, которые в рамках алгебры высказываний считались бы элементарными.

Такой логической системой является логика предикатов, а алгебра высказываний — ее составной частью.

§1. Предикаты

Понятие *предиката* обобщает понятие «высказывание».

Если аргумент один — то предикат выражает свойство аргумента, если больше — то отношение между аргументами.

О. *Одноместным предикатом* называется функция одной переменной, значениями которой являются высказывания об объектах, представляющих значения аргумента.

*Одноместны*й предикат $P(x)$ — это произвольная функция переменной x, определенная на некотором множестве $\boldsymbol{M}$ и принимающая (логические) значения из множества {Л, И}.

О. Множество $\boldsymbol{M}$, на котором определен предикат $P(x)$, называется *предметной областью* или *областью определения предиката,* а сама переменная x — *предметной переменной.*

Таким образом, одноместный предикат *P(x)* — это утверждение об объекте *x*, где *x* рассматривается как переменная.

При фиксации значения переменной *x* об утверждении *P(x)* можно сказать, истинно оно или ложно.

То есть если в *P(x)* вместо *x* подставить конкретный изучаемый объект *a*, то получаем высказывание, принадлежащее алгебре высказываний.

О. *Областью истинности* предиката *P(x),* заданного на множестве $\boldsymbol{M}$, называется совокупность всех *x* из $\boldsymbol{M}$, при которых данный предикат обращается в истинное высказывание:

$$I_P = \{x \in \boldsymbol{M} \mid P(x) = 1\} .$$

Иными словами, область истинности предиката есть подмножество его предметной области, на котором данный предикат принимает значение 1.

О. Предикат $P(x)$, определенный на $\boldsymbol{M}$, называется *тождественно истинным*, если $I_P = M$, и *тождественно ложным*, если $I_P = \emptyset$.

Чтобы задать предикат от n аргументов (n-местный предикат), прежде всего следует указать множества $M_1, \ldots, M_n$ — области изменения *предметных переменных* $x_1, \ldots, x_n$. При этом *n-местным предикатом* называется произвольная функция n переменных $P(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве

$$M = M_1 \times \ldots \times M_n$$

и принимающая (логические) значения из множества {Л, И}.

Например, $P(x, y)$ = «y делится на x без остатка» — предикат от двух переменных, где x и y могут принимать значения или из множества натуральных чисел, или из множества целых чисел, или возможно из множества многочленов. При этом, вообще говоря, получаются различные предикаты.

Таким образом, n-местный предикат $P\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — это утверждение об объектах $x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ рассматриваются как переменные.

При замене переменных некоторыми значениями из области определения предикат превращается в высказывание, являющееся *истинным* или *ложным*. Значение истинности этого высказывания называется значением предиката от данных переменных.

Например, при подстановке в предикат

$$P(x_1, \ldots, x_n)$$

значений переменных

$$x_1 = a_1, \ \ldots, \ x_n = a_n$$

получим высказывание

$$P(a_1, \ldots, a_n)$$

Любое высказывание можно рассматривать как 0-местный предикат.

Предикаты P и Q, определенные на множестве

$$M = M_1 \times \ldots \times M_n,$$

называются *равносильными* (пишут $P \equiv Q$), если

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, \ldots, x_n)$$

для любого набора $x_1, \ldots, x_n$ предметных переменных из M.

Расширение логики высказываний до логики предикатов получается за счет включения в формулы утверждений, являющихся предикатами.

Так как предикаты — это отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и др.), то эти операции (логические связки) естественно определяются и для предикатов.

При этом значения истинности сложных предикатов находятся в зависимости от значений связываемых предикатов по тем же правилам, что и для высказываний.

О. ***Конъюнкцией n -местных предикатов P и Q*** , определенных на множестве М, называют новый n -местный предикат, определенный на этом же множестве, обозначаемый ***P∧Q***, который обращается в истинное высказывание на тех и только тех значениях переменных из множества М, на котором в истинное высказывание обращаются оба данных предиката.
Таким образом,

$$(P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) \sim P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n).$$

Аналогично определяются

$$P \vee Q, \ \rceil P, \ P \rightarrow Q, \ \ P \equiv Q$$

Примеры.

1. $x^2 - x - 2 = 0$ — предикат. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $I_P = \{-1, 2\}$.

2. Пусть $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Предикаты $P(x)$ = «x — простое число» и $Q(x)$ = «x — четное число» заданы на множестве M. Требуется найти области истинности этих предикатов.

Решение. Очевидно, мы имеем $I_P = \{3, 5, 7\}$ и $I_Q = \{4, 6, 8\}$.

3. Найти область истинности предиката

$$P(x, y) = «y - x^2 \geq 0»$$

и изобразить его на координатной плоскости.

Решение. Область истинности данного предиката — часть плоскости Oxy, заключенная между ветвями параболы $y = x^2$.

4. Найти область истинности предиката

$$B(x, y) = «x^2 + y^2 < 5»,$$

заданного на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ $\left(\mathbb{Z}_+ = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}\right)$.

Ответ: $\{(0;\ 0),\ (0;\ 1),\ (0;\ 2),\ (1;\ 0),\ (1;\ 1),\ (2;\ 0)\}$.

§2. Кванторы.

Функциональная природа предиката влечет за собой введение еще одного понятия — квантора.

Квантор — это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката.

Квантор всеобщности ∀ и квантор существования ∃.

О. Пусть $\mathrm{P}(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве $\boldsymbol{M}$. Под выражением $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ понимают высказывание, истинное, если $\mathrm{P}(x)$ истинно для каждого элемента $x \in \boldsymbol{M}$, и ложное в противном случае.

Истинность высказывания $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ означает, что область истинности предиката $\mathrm{P}(x)$ совпадает с областью изменения переменной x . Читается это высказывание: «для всякого x истинно $\mathrm{P}(x)$ ».

Под выражением $\exists\ x$ P(x) понимают высказывание, истинное, если существует $x \in \boldsymbol{M}$, для которого P(x) истинно, и ложное в противном случае.

Истинность высказывания $\exists\ x$ P(x) означает, что область истинности предиката P(x) не пуста. Читается это высказывание: «существует x, при котором P(x) истинно».

О высказывании $\forall x$ P(x) (соответственно, $\exists\ x$ P(x)) говорят, что оно ***получено из предиката P навешиванием квантора всеобщности (соответственно, квантора существования) по переменной x .***
Переменная, на которую навешен квантор, называется связанной переменной.

Если некоторый предикат P(x) определен на конечном множестве $\boldsymbol{M}$ = $\{a_1,\ldots, a_k\}$, то справедливы следующие тождества:

$$\forall x\, P(x) \sim P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_k); \quad \exists\, x\, P(x) \sim P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_k).$$

Квантор всеобщности обобщает конъюнкцию, а квантор существования — дизъюнкцию.

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения.

Выражение, на которое навешивается квантор $\forall x$ или $\exists\, x$, называется *областью действия квантора*;

Все вхождения переменной x в это выражение являются связанными.
Не связанные кванторами переменные называются *свободными переменными*.

Например,

к предикату от двух переменных P(x, y) кванторные операции можно применить к одной переменной или к двум переменным. Получаем следующие высказывания:

$$\forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall x\, \exists\, y\, P(x,y);\quad \forall x\, \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x\, \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x\, \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall y\, \forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y\, \forall x\, P(x,y);\quad \exists\, y\, \exists\, x\, P(x,y).$$

В общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение.

Примеры

1. Пусть $P(x,y)$ = «x является матерью y». Тогда

$\forall y\, \exists\, x\, P(x,y)$ = «у каждого человека есть мать»,

$\exists\, x\, \forall y\, P(x,y)$ = «существует мать всех людей».

Таким образом, перестановка кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение (первое высказывание истинно, второе — ложно).

2. Установить истинность или ложность высказывания:

$$\exists x \left(x \in \{2{,}5\} \to \left(x^2 - 6x + 8 = 0 \right) \right).$$

Решение. Уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$ имеет корни $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Используя тождество $A \to B \sim \neg(A \wedge \neg B)$, исходное высказывание преобразуем к виду:

$$\exists x \left(x \in \{2{,}5\} \to \left(x^2 - 6x + 8 = 0 \right) \right) \sim$$

$$\sim \; \exists x \overline{\left(x \in \{2{,}5\} \wedge \overline{\left(x^2 - 6x + 8 = 0 \right)} \right)} \sim$$

$$\sim \; \exists x \overline{\left(x \in \{2{,}5\} \wedge x \notin \{2{,}4\} \right)} \sim \exists x \, \overline{(x = 5)} \sim \exists x \, (x \neq 5).$$

Следовательно, исходное высказывание истинно.

3. Пусть на множестве $M = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ задан предикат

$$P(x) = \text{«}x \text{ — четное число»}.$$

С помощью логических связок $\wedge$ и $\vee$ записать высказывания $\forall x\, P(x)$ и $\exists\, x\, P(x)$. Каковы значения истинности этих высказываний?

Решение. Так как множество M — конечное, кванторы $\forall$ и $\exists$ сводятся к повторному применению логических связок $\wedge$ или $\vee$. Имеем:

$$\forall x\, P(x) \sim P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \sim 0;$$

$$\exists\, x\, P(x) \sim P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \sim 1.$$

§3. Формулы логики предикатов

Расширение логики высказываний до логики предикатов получается за счет включения в формулы утверждений, являющихся предикатами.

Формула логики предикатов определяется индуктивно по следующей схеме:

1) Всякая пропозициональная переменная (т. е. 0– местный предикат) есть формула.

2) Если Р — это n – местный предикат, то Р (x_1, …, x_n) — формула. Все переменные x_1, … ,x_n — свободные переменные, связанных переменных в этой формуле нет.

3) Если А — формула, то $\rceil$ А — формула с теми же свободными и связанными переменными, что и в формуле А.

4) Если А и В — формулы, причем нет таких переменных, которые были бы связанными в одной формуле и свободными в другой, то выражения

$$(A \wedge B) , (A \vee B) , (A \rightarrow B) , (A \equiv B)$$

суть формулы, в которых свободные переменные формул А и В остаются свободными, а связанные переменные формул А и В остаются связанными.

5) Если А — формула, содержащая свободную предметную переменную x , то $\forall x$ А и $\exists$ x А — тоже формулы. Переменная x в них связана. Остальные же переменные, которые в формуле А были свободны, остаются свободными и в новых формулах. Переменные, которые были связаны в А , связаны и в новых формулах.

Других формул, кроме построенных по правилам пяти предыдущих пунктов, нет.

О. Формула вида Р ($x_1, \ldots, x_n$) , где Р — это n – *местный предикат, называется атомарной (или элементарной)*.

Литеральной формулой (или литералом) называют атомарную формулу или отрицание атомарной формулы.

Атомарная формула называется *положительным литералом,* а ее отрицание — *отрицательным литералом*.

О. *Дизъюнкт* — это дизъюнкция конечного числа литералов. Если дизъюнкт не содержит литералов, его называют *пустым дизъюнктом*.

Формула находится *в конъюнктивной нормальной форме*, если это конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Пример

Следующее выражение является формулой логики предикатов:

$(\forall x \; \exists \, y \; \mathrm{P}(\, x, y, u)) \to \exists \, x \; \mathrm{Q}(\, x, w)$;

здесь P — трехместный предикат, а Q — двухместный предикат. В этой формуле переменные x, y связаны, а переменные u, w свободны.

3. Записать, введя предикаты, в виде формулы рассуждение:

«Каждый человек любит себя. Значит, кто-то кого-нибудь любит».

Решение. Введем двухместный предикат $P(x, y)$ = «x любит y». Тогда первая часть предложения выражается высказыванием $\forall x \, P(x, x)$, а вторая — высказыванием $\exists \, x \, \exists \, y \, P(x, y)$. Искомая общая формула имеет вид:

$$\forall x \, P(x, x) \; \to \; \exists \, x \, \exists \, y \, P(x, y).$$

§4. Основные равносильности, содержащие кванторы

Пусть P(*x*) , Q(*x*) и R(*x*, *y*) — произвольные два одноместных предиката и двухместный предикат, а S — произвольное переменное высказывание (или формула, не содержащая *x*). Тогда имеют место следующие равносильности:

1. $\overline{\forall x\, P(x)} \sim \exists x\, \overline{P(x)}$ (*первый закон де Моргана для кванторов*);
2. $\overline{\exists x\, P(x)} \sim \forall x\, \overline{P(x)}$ (*второй закон де Моргана для кванторов*);

(Используя эти соотношения, можно выразить один квантор через другой.)

3. $\forall x\, P(x) \sim \overline{\exists x\, \overline{P(x)}}$;

4. $\exists x\, P(x) \sim \overline{\forall x\, \overline{P(x)}}$;

5. $\forall x\, (P(x) \wedge S) \sim \forall x\, P(x) \wedge S$;

6. $\forall x\, (S \wedge P(x)) \sim S \wedge \forall x\, P(x)$;

7. $\forall x\, (P(x) \vee S) \sim \forall x\, P(x) \vee S$;

8. $\forall x\, (S \vee P(x)) \sim S \vee \forall x\, P(x)$;

(Соотношения 5—8 показывают, что произвольное высказывание или формулу, не содержащую x, можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции и дизъюнкции.)

9. $\exists x\,(P(x) \wedge S) \sim \exists x\, P(x) \wedge S$;

10. $\exists x\,(S \wedge P(x)) \sim S \wedge \exists x\, P(x)$;

11. $\exists x\,(P(x) \vee S) \sim \exists x\, P(x) \vee S$;

12. $\exists x\,(S \vee P(x)) \sim S \vee \exists x\, P(x)$;

(Соотношения 9—12 показывают, что произвольное высказывание или формулу, не содержащую x, можно вносить под знак квантора существования и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции и дизъюнкции.)

13. $\forall x\,(P(x)\rightarrow S) \sim \exists\, x\, P(x)\rightarrow S$;

14. $\forall x\,(S\rightarrow P(x)) \sim S\rightarrow \forall x\, P(x)$;

15. $\exists\, x\,(P(x)\rightarrow S) \sim \forall x\, P(x)\rightarrow S$;

16. $\exists\, x\,(S\rightarrow P(x)) \sim S\rightarrow \exists\, x\, P(x)$;

17. $\forall x\, S \sim S$;

18. $\exists\, x\, S \sim S$;

19. $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \sim \forall x\, P(x)\wedge \forall x\, Q(x)$ (*дистрибутивность квантора всеобщности относительно конъюнкции*);

20. $\exists\, x\,(P(x)\vee Q(x)) \sim \exists\, x\, P(x)\vee \exists\, x\, Q(x)$ (*дистрибутивность квантора существования относительно дизъюнкции*);

21. $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \;\rightarrow\; (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \sim 1$;

22. $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \;\rightarrow\; \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \sim 1$;

23. $\forall x\, P(x) \sim \forall y\, P(y)$;

24. $\exists x\, P(x) \sim \exists y\, P(y)$;

25. $\forall x\, \forall y\, R(x,y) \sim \forall y\, \forall x\, R(x,y)$ (*коммутация одноименных кванторов*);

26. $\exists x\, \exists y\, R(x,y) \sim \exists y\, \exists x\, R(x,y)$ (*коммутация одноименных кванторов*);

27. $\exists y\, \forall x\, R(x,y) \;\rightarrow\; \forall x\, \exists y\, R(x,y) \sim 1$.

(Соотношения 21, 22 и 27 не будут верны, если поменять направления стрелок на противоположное.)

§ 5. Предваренная нормальная форма

Для облегчения анализа сложных суждений формулы логики предикатов рекомендуется приводить к предваренной нормальной форме.

О. Формула логики предикатов находится в предваренной (или префиксной) нормальной форме, если она имеет вид

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F,$$

где каждый Q_i есть квантор всеобщности или существования (т. е. $Q_i x_i$ обозначает $\forall x_i$ или $\exists\, x_i$),
переменные x_i , x_j различны при $i \neq j$,
F — формула, содержащая операции $\wedge$, $\vee$, $\rceil$ и не содержащая кванторов (причем знаки отрицания отнесены только к элементарным предикатам и высказываниям, то есть к элементарным формулам).

Выражение $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ называют *префиксом* (или *кванторной приставкой*), а формулу F — матрицей.

Если все Q_i — $\forall$, то эта форма называется $\forall$-формулой.
Если все Q_i — $\exists$, то эта форма называется $\exists$-формулой.

О. Если существует i такое, что $Q_1, \dots, Q_i$ суть $\exists$, а $Q_{i+1}, \dots, Q_n$ суть $\forall$, то эта форма называется *скулемовской нормальной формой* (или *$\exists\forall$-формулой*).

О. Формулы, в которых из логических символов имеются только символы $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, причем символ $\rceil$ встречается лишь перед символами предикатов, называют *приведенными формулами.*

Таким образом, формула логики предикатов, находящаяся в префиксной нормальной форме, является, в частности, приведенной формулой.

Для любой формулы существует равносильная ей приведенная формула, которая имеет те же множества свободных и связанных переменных. Более того, всякая формула логики предикатов с помощью равносильных преобразований может быть приведена к равносильной ей префиксной нормальной форме.

Например,
следующие формулы находятся в префиксной нормальной форме:

$$\forall x \, \forall y \left(\rceil P(x,y) \wedge Q(y) \right);$$

$$\forall x \, \exists \, y \, \forall z \left(A(x,y) \vee \rceil B(y,z) \vee C(z) \right).$$

Процедура приведения формулы логики предикатов к префиксной нормальной форме:

1) Сначала избавляются от операций импликации, эквивалентности, выразив их через логические связки $\rceil$, $\wedge$ и $\vee$ по законам:

$$A \to B \sim \rceil A \vee B,$$

$$A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge \rceil B),$$

2) Доводят символы отрицания до символов предикатов, используя правила де Моргана, и избавляются от двойных отрицаний:

$$\rceil (A \wedge B) \sim \rceil A \vee \rceil B,$$

$$\rceil (A \vee B) \sim \rceil A \wedge \rceil B,$$

$$\rceil \left(\forall x \, P(x) \right) \sim \exists \, x \left(\rceil P(x) \right),$$

$$\rceil \left(\exists \, x \, P(x) \right) \sim \forall x \left(\rceil P(x) \right),$$

$$\rceil \rceil A \sim A.$$

3) Для формул, содержащих подформулы вида

$$\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x), \qquad \exists\, x\, P(x) \land \exists\, x\, Q(x)$$

и т. п., вводят новые переменные, позволяющие выносить знаки кванторов наружу.

Например:

$$\exists\, x\, P(x) \land \exists\, x\, Q(x) \sim \exists\, x\, \exists\, y\, \big(P(x) \land Q(y)\big);$$

$$\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \sim \forall x\, \forall y\, \big(P(x) \lor Q(y)\big);$$

$$\forall x\, P(x) \lor \exists\, x\, Q(x) \sim \forall x\, \exists\, y\, \big(P(x) \lor Q(y)\big).$$

4) Используя все известные равносильности логики предикатов, получают формулу в виде префиксной нормальной формы.

Примеры 1.
Привести равносильными преобразованиями к префиксной нормальной форме следующую формулу логики предикатов:

$$\overline{S \to \exists\, x\, A(x)}.$$

Решение. Имеем

$$\overline{S \to \exists\, x\, A(x)} \sim \left[A \to B \sim \overline{A} \vee B \right] \sim \overline{\overline{S} \vee \exists\, x\, A(x)} \sim$$

$$\sim \left[\overline{A \vee B} \sim \overline{A} \wedge \overline{B} \right] \sim S \wedge \overline{\exists\, x\, A(x)} \sim \left[\overline{\exists\, x\, A(x)} \sim \forall x\, \overline{A(x)} \right] \sim$$

$$\sim \; S \wedge \forall x\, \overline{A(x)} \sim \forall x \left(S \wedge \overline{A(x)} \right).$$

2. Привести следующую формулу к предваренной нормальной форме, считая **A** и **B** бескванторными формулами:

$$\left(\exists\, x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists\, x\ \forall y\ B(x,y)\right).$$

Решение. Имеем

$$\left(\exists\, x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists\, x\ \forall y\ B(x,y)\right) \sim$$

$$\sim \left(\exists\, x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists\, z\ \forall y\ B(z,y)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \exists\, z \left(\left(\forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\forall y\ B(z,y)\right)\right) \sim$$

$$\sim\ \exists\, x\, \exists\, z\, \forall y \left(A(x,y) \wedge B(z,y)\right).$$

3. Привести к предваренной нормальной форме следующую формулу:

$$\forall x\ \big(\ \urcorner A(x) \to \exists\, y\ (\ \urcorner B(y))\big) \to \big(B(z) \to A(z)\big).$$

Решение. Имеем

$$\forall x\ \big(\ \urcorner A(x) \to \exists\, y\ (\ \urcorner B(y))\big) \to \big(B(z) \to A(z)\big) \sim$$

$$\sim\ \forall x\ \big(A(x) \vee \exists\, y\ (\ \urcorner B(y))\big) \to \big(\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big) \sim$$

$$\sim\ \urcorner \forall x\ \big(A(x) \vee \exists\, y\ (\ \urcorner B(y))\big) \vee \big(\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big) \sim$$

$$\sim \exists\, x\ \big(\ \urcorner A(x) \wedge \forall y\ B(y)\big) \vee \big(\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big) \sim$$

$$\sim \exists\, x\ \forall y\ \Big[\big(\ \urcorner A(x) \wedge B(y)\big) \vee \big(\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big)\Big] \sim$$

$$\sim \exists\, x\ \forall y\ \Big[\big(\ \urcorner A(x) \vee\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big) \wedge \big(B(y) \vee\ \urcorner B(z) \vee A(z)\big)\Big].$$

§ 6. Тавтологии логики предикатов

Напомним, что формула алгебры высказываний, принимающая значение 1 (истина) при любом наборе значений входящих в нее переменных, называется тождественно истинной или тавтологией.

О. Формулу логики предикатов называют *общезначимой* (или тождественно истинной, или тавтологией), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный предикат. Общезначимую формулу называют также *логическим законом*.

О. Формулу A назовем *выполнимой*, если формула $\rceil$A не является тождественно истинной.

О. Формулу логики предикатов называют *тождественно ложной* (или противоречием), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно ложный предикат.

Напомним, что проблемой разрешения для алгебры высказываний называется следующий вопрос: существует ли алгоритм, позволяющий для произвольной логической формулы в конечное число шагов выяснить, является ли она тождественно истинной?

Проблема распознавания общезначимости формул логики предикатов существенно сложнее. Она также называется проблемой разрешения. Метод перебора всех вариантов здесь не применим, так как вариантов может быть бесконечно много. В 1936 году А. Чёрч доказал, что *в общем виде проблема разрешения для логики предикатов не имеет алгоритмического решения.* Сформулируем соответствующую теорему:

Теорема Чёрча. Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.

Примеры 1.
Доказать общезначимость следующей формулы логики предикатов:

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\big).$$

Решение.
Упростим формулу, используя равносильные преобразования:

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \overline{\forall x\, \big(\overline{P(x)} \vee Q(x)\big)} \vee \big(\overline{\forall x\, P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \overline{\big(\overline{P(x)} \vee Q(x)\big)} \vee \big(\exists x\, \overline{P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \big(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\big) \vee \big(\exists x\, \overline{P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \big(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\big) \vee \big(\exists x\, \overline{P(x)}\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \Big(\big(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\big) \vee \overline{P(x)}\Big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \big(\overline{Q(x)} \vee \overline{P(x)}\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \exists x\, \big(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \big(\exists x\, \overline{P(x)}\big) \vee \big(\exists x\, \overline{Q(x)}\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \big(\exists x\, \overline{P(x)}\big) \vee \big(\overline{\forall x\, Q(x)}\big) \vee \big(\forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \big(\exists x\, \overline{P(x)}\big) \vee 1 \sim 1.$$

О. *Переменная* называется *свободной* (*связанной*) переменной в данной формуле, если существуют свободные (связанные) ее вхождения в эту формулу. Формула называется замкнутой, если она не содержит никаких свободных переменных, т.е. либо все ее переменные связанные, либо переменных нет совсем.

Например,
формула $\forall x(\forall y A_1(x,y) \rightarrow A_2(x,x))$ - замкнутая, а формула $\forall x A(x,y)$ - не замкнутая, ибо содержит свободную переменную y.

О. *Замыканием* формулы А называется формула, полученная из А приписыванием перед нею кванторов всеобщности по всем ее свободным переменным, при этом кванторы приписываются следующим образом: сначала записываем кванторы общности по всем свободным переменным *x* (если они есть) в порядке возрастания их индексов, затем по свободным переменным *y* (если они есть) в порядке возрастания их индексов и т.д.

Так, замыканием формулы А (x_3, x_1, y_2) будет формула:

$$\forall x_1 \forall x_3 \forall y_2 A \quad (x_3, x_1, y_2)$$

а замыканием для формулы

$$\forall y_1 \exists x_3 A(x_1, y_1, x_3) \rightarrow A(x_3, x_2)$$

будет формула:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (\forall y_1 \exists x_3 A(x_1, y_1, x_3) \rightarrow A(x_3, x_2)).$$

§ 4. Интерпретация. Модель

Обозначения:

Буквы начала латинского алфавита ($a,b,c,...$) и они же с числовыми индексами ($a_1,a_2,...,b_1,b_2,...,c_1,c_2,...$) называются *предметными постоянными*.

Буквы конца латинского алфавита ($x,y,z,...$) и они же с числовыми индексами ($x_1,x_2,...,y_1,y_2,...,z_1,z_2,...$) называются *предметными переменными*.

Буквы A_i^n с числовыми индексами $i \geq 1, n \geq 0$ называются *предикатными буквами*, а f_i^n, $i \geq 1, n \geq 0$,- *функциональными буквами*. Верхний индекс предикатной или функциональной буквы указывает число аргументов, а нижний индекс служит для различения букв с одним и тем же числом аргументов.

Будем по возможности опускать числовые индексы у предикатных и функциональных букв, считая, что их легко можно восстановить. Например, вместо $A_1^2(x,y)$ будем писать $A_1(x,y)$, и если нет других двухаргументных (двуместных) предикатных букв A, то вместо $A_1(x,y)$ будем писать просто $A(x,y)$, кроме того иногда будем использовать буквы P, Q, R, S для обозначения предикатных букв A_i^n.

Определение *терма*:

а) всякая предметная переменная или предметная постоянная есть терм;

б) если f_i^n - функциональная буква и $t_1,t_2,...,t_n$ - термы, то $f_i^n(t_1,t_2,...,t_n)$ есть терм,

в) выражение является термом только в том случае, если это следует из правил а) и б).

Примеры термов: a, x_1, $f_1^2(x,a)$, $f_3^2(a, f_2^1(y))$.

Предикатные буквы, примененные к термам, порождают элементарные формулы, или точнее: если A_i^n - предикатная буква, а $t_1,t_2,...,t_n$ - термы, то $A_i^n(t_1,t_2,...,t_n)$ - *элементарная формула*.

Будем считать, что нульместная предикатная буква тоже является элементарной формулой.

Примеры элементарных формул: A_1^0, $A_1^2(x_1,a_1)$, $A_1^1(f_1^1(x))$, $A_2^3(x,y, f_1^2(a,x))$.

Примеры формул: $(A_1^0 \Rightarrow A_1^2(x,a))$, $(\forall x A_1^2(x, f_1^1(f_1^1(x))))$, $(\forall x(\exists x A_1^1(a)))$.

О. Переменная называется свободной (связанной) переменной в данной формуле, если существуют свободные (связанные) ее вхождения в эту формулу.

Например,
вхождение переменной *x* в формулу

$$\forall y A_1^2(x,y) \rightarrow A_2^2(y,y)$$

является свободным, первое и второе вхождение переменной *y* - связанное, а третье и четвертое вхождение *y* в эту формулу - свободное.

О. Формула называется замкнутой, если она не содержит никаких свободных переменных, т.е. либо все ее переменные связанные, либо переменных нет совсем.
Например, формула

$$\forall x(\ \forall y\, A_1^2\,(x,y) \to A_2^2\,(x,x))$$

- замкнутая,

а формула

$$\forall x\, A_1^2\,(x,y)$$

- не замкнутая,

ибо содержит свободную переменную y.

О. Замыканием формулы **А** называется формула, полученная из **А** приписыванием перед нею кванторов всеобщности по всем ее свободным переменным, при этом кванторы приписываются следующим образом: сначала записываем кванторы общности по всем свободным переменным *x* (если они есть) в порядке возрастания их индексов, затем по свободным переменным *y* (если они есть) в порядке возрастания их индексов и т.д.

Так, замыканием формулы $A_1^3\,(x_3\,, x_1\,, y_2)$ будет формула:

$$\forall x_1\, \forall x_3\, \forall y_2\, A_1^3\,(x_3, x_1, y_2),$$

а замыканием для формулы $\forall y_1 \exists x_3\, A_1^3\,(x_1, y_1, x_3) \to A_1^2\,(x_3, x_2)$ будет формула:

$$\forall x_1\, \forall x_2\, \forall x_3 (\ \forall y_1 \exists x_3\, A_1^3\,(x_1, y_1, x_3) \to A_1^2\,(x_3, x_2)).$$

Интерпретацию будем считать заданной, если:

1) Задано непустое множество $\mathcal{M}$, называемое областью интерпретации.
2) Заданы следующие соответствия:
   a) предикатным буквам A_i^n поставлены в соответствие некоторые n - местные предикаты (отношения) в $\mathcal{M}$;
   b) функциональным буквам f_i^n поставлены в соответствие некоторые n - аргументные функции, отображающие $\mathcal{M}^n$ в $\mathcal{M}$;
   c) каждой предметной постоянной поставлен в соответствие некоторый (фиксированный) элемент из $\mathcal{M}$;
   d) символам $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall x$, $\exists x$ поставлен в соответствие их обычный смысл.
3) Считается, что предметные переменные пробегают всё множество $\mathcal{M}$.

Например, чтобы задать интерпретацию для формулы $\forall x\, A_1^3(x,y,b_1)$, нужно задать множество $\mathcal{M}$ - область интерпретации (область изменения переменных x,y). Из этой области $\mathcal{M}$ будем брать некоторый элемент, соответствующий предметной постоянной b_1. Далее нужно задать 3-х местный предикат на $\mathcal{M}$, соответствующей предикатной букве A_1^3. Так, можно положить, что $\mathcal{M}=[0, \infty)$; предметной постоянной b_1 поставить в соответствие 1, а $A_1^3(x,y,z)$ поставить в соответствие предикат $x + y \geq z$. Тогда формула $\forall x\, A_1^3(x,y,b_1)$ в заданной интерпретации запишется:

$$\forall x(x + y \geq 1)$$

и означает, что для любого x $(x \in [0, \infty))$ сумма $x + y$ больше 1. Очевидно, что это отношение истинно при некоторых y $(y \geq 1)$ и ложно при других значениях y $(0 \leq y < 1)$. Если предметной постоянной b_1 поставить в соответствие 0, а не 1, то утверждение $\forall x(x + y \geq 0)$ будет истинно при любом значении свободной переменной y.

§ 5. Свойства формул в данной интерпретации

1. Формула A ложна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда $\rceil$A истинно в этой же интерпретации. Формула A истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда $\rceil$A ложна в этой же интерпретации.

2. Никакая формула не может быть одновременно истинной и ложной в одной и той же интерпретации.

3. Если в данной интерпретации истинны A и A→B, то истинно и B.

4. Формула A→B ложна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда A истинно в этой интерпретации, а B ложно.

5. Формула A∧B выполнима в данной интерпретации тогда и только тогда, когда A и B принимают значение И одновременно хотя бы для одной совокупности значений своих свободных переменных. Если же свободных переменных нет, то формула A∧B выполнима в данной интерпретации тогда и только тогда, когда обе формулы A и B истинны в этой интерпретации.

6. Формула A∨B выполнима в данной интерпретации, если хотя бы одна из них выполнима в этой интерпретации.

7. Формула A≡B выполнима в данной интерпретации тогда и только тогда, когда A и B принимают значение И одновременно или значение Л (тоже одновременно) хотя бы для одной совокупности значений своих свободных переменных. Если же свободных переменных нет, то формула A≡B выполнима в данной интерпретации тогда и только тогда, когда A и B принимают одинаковые истинностные значения в этой интерпретации.

8. Формула ∃ xA выполнима в данной интерпретации тогда и только тогда, когда A принимает значение И хотя бы для одной совокупности значений её свободных переменных и хотя бы одного значения переменной x.

9. Формула ∀ xA истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда в этой интерпретации истинно A.
Как следствие из этого утверждения получаем, что формула A истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда в этой интерпретации истинно замыкание формулы A. Если формула A замкнута, то в данной интерпретации A означает некоторое высказывание (нет свободных переменных), следовательно, A истинно либо ложно. Иначе, если A замкнуто, то в любой данной интерпретации либо истинно A, либо истинно $\rceil$A.

10. Рассмотрим некоторую пропозициональную форму. Если в пропозициональную форму вместо пропозициональных букв подставить формулы логики предикатов (вместо всех вхождений одной и той же пропозициональной буквы подставлять одну и ту же формулу), получим некоторую формулу, которая называется частным случаем пропозициональной формы.
Всякий частный случай любой тавтологии истинен в каждой интерпретации.